Windomの解答速報　昭和大学医学部Ⅱ期 数学

1

(1-1) 33番目　　(1-2) 42153

(2-1) $\overrightarrow{ON}=\dfrac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}$　　(2-2) $\overrightarrow{PN}=\dfrac{b-a}{a+b}\vec{a}$

(3-1) $a_n=\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$　　(3-2) $\dfrac{1}{2}$

(4-1) $x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$　　(4-2) $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(1)
(1-1)

1 0000 の形　$4!=24$
2 1 000 の形　$3!=6$
2 3 1 00 の形　$2!=2$
この次が 23415 だから
$24+6+2+1=33$ 番目

(1-2)

1 0000 の形　$4!=24$
2 0000 の形　24
3 0000 の形　24
4 1 000 の形　$3!=6$
4 2 1 3 5
4 2 1 5 3 が 80番目の数

(2)
(2-1)
角の二等分線の性質から
$AN:NB=OA:OB=a:b$
$$\overrightarrow{ON}=\frac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}$$

(2-2)
$\overrightarrow{OP}\parallel\vec{a}+\vec{b}$ だから $\overrightarrow{OP}=s(\vec{a}+\vec{b})$ （s：実数）とおく
$\overrightarrow{AP}=s(\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=(s-1)\vec{a}+s\vec{b}$
$\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{ON}$ だから
$$\{(s-1)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot\frac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}=0$$
$$\{(s-1)\vec{a}+s\vec{b}\}\cdot(b\vec{a}+a\vec{b})=0$$
$$b(s-1)|\vec{a}|^2+bs\,\vec{a}\cdot\vec{b}+a(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+as|\vec{b}|^2=0$$
$$a^2b(s-1)+bs\,\vec{a}\cdot\vec{b}+a(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+ab^2s=0$$
$\{a^2b+ab^2+(a+b)\vec{a}\cdot\vec{b}\}s=a^2b+a\,\vec{a}\cdot\vec{b}$　（$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b$ より）
$$(a+b)(ab+\vec{a}\cdot\vec{b})s=a\{ab+\vec{a}\cdot\vec{b}\}$$
$$s=\frac{a}{a+b}$$
従って $\overrightarrow{PN}=\dfrac{b\vec{a}+a\vec{b}}{a+b}-\dfrac{a}{a+b}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{b-a}{a+b}\vec{a}$

(3)
(3-1)
$$f_n(x)=\frac{(\log x)^n}{x^2},\quad f_n'(x)=\frac{-n(\log x)^{n-1}\left(\log x-\frac{n}{2}\right)}{x^3}$$

x	(0)		$e^{\frac{n}{2}}$	
$f_n'(x)$		+	0	−
$f_n(x)$		↗	極大	↘

（nが奇数）

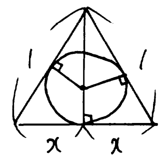
x	(0)		1		$e^{\frac{n}{2}}$	
$f_n'(x)$		−	0	+	0	−
$f_n(x)$		↘	極小	↗	極大	↘

（nが偶数）

いずれにしても $x=\dfrac{n}{2}$ で極大となる。
極大値 $a_n=\dfrac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{\left(e^{\frac{n}{2}}\right)^2}=\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

(3-2)
$$\frac{a_{n+1}}{n\,a_n}=\frac{\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{n}{2e}\right)^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n+1}{2en}$$
$$=\frac{1}{2e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n}\longrightarrow\frac{1}{2e}\cdot e\cdot 1=\frac{1}{2}$$
$(n\longrightarrow\infty)$

(4)
(4-1)



三角形の高さは $\sqrt{1-x^2}$
三角形の面積
$$\frac{1}{2}\times 2x\times\sqrt{1-x^2}=x\sqrt{1-x^2}$$
また、内接球の半径を r とすると，三角形の面積は
$$\frac{1+1+2x}{2}r=(1+x)r$$
従って $(1+x)r=x\sqrt{1-x^2}\Longrightarrow r=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x}$

(4-2)
体積を V とすると　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)^3=\dfrac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\dfrac{x^2(1-x)}{1+x}}\right)^3$
$f(x)=\dfrac{x^2(1-x)}{1+x}$　$(0<x<1)$ とおくと
$$f'(x)=\frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2}$$

x	(0)		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		(1)
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$f(x)$ は $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で極大かつ最大
従って，V も $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で最大となる。

2

(1) $f(x)=x^2-2$，$f'(x)=2x$
$(x_n,\ x_n^2-2)$ における接線は　$y-(x_n^2-2)=2x_n(x-x_n)$
$$y=2x_nx-x_n^2-2$$
$y=0$ として　$x=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$
これが x_{n+1} だから　$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)$ ……※)

(2) $x_1=2>0$ だから ※) より 帰納的に $x_n>0$
（相加平均）≧（相乗平均）より
$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\geqq\sqrt{x_n\cdot\frac{2}{x_n}}=\sqrt{2}$$
等号は $x_n=\dfrac{2}{x_n}\Longrightarrow x_n=\sqrt{2}$　（$x_n>0$ より）で成立だが
これは $x_1=2$ に反する。
従って，等号は成立せず
$x_{n+1}>\sqrt{2}$　つまり　$x_n>\sqrt{2}$ となる。

(3) $x_n-x_{n+1}=x_n-\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)=\dfrac{x_n^2-2}{2x_n}>0$　[$x_n>\sqrt{2}$ より]
従って　$x_n>x_{n+1}$

(4) $x_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{2}{x_n}\right)-\sqrt{2}=\dfrac{(x_n-\sqrt{2})^2}{2x_n}=\dfrac{x_n-\sqrt{2}}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})$
ここで $\dfrac{x_n-2}{2x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x_n}\right)$
(3) より x_n は単調減少だから $x_1>x_n$ つまり $2>x_n$
$$\frac{1}{2}<\frac{1}{x_n}\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{2}{x_n}\Longrightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{2}}>1-\frac{\sqrt{2}}{x_n}$$
従って
$$x_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{x_n-2}{2x_n}(x_n-\sqrt{2})<\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x_n-\sqrt{2})<\frac{\sqrt{2}-1}{2}(x_n-\sqrt{2})$$
つまり　$x_{n+1}-\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}(x_n-\sqrt{2})$ ……(#)

(5) (#) を繰り返し使って
$$0<x_n-\sqrt{2}<\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt{2})$$
$0<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}<1$ だから　$\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{n-1}(x_1-\sqrt{2})\longrightarrow 0$
「はさみうち」から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

$\boxed{3}$

(1) (1-1) $100p+180$ (1-2) $\frac{1}{5}<p\leqq 1$

(2) $\log(x^2+1)-\log|x-1|+C$ (C : 積分定数)

(3) 最大値 $=2$ $(x=\frac{\pi}{3})$ 最小値 $=1$ $(x=0)$

解説

(1) (1-1)

青い箱の支払い額の期待値を E_B とすると、

$$E_B=1180\times\frac{1}{10}p+180\times\left(1-\frac{1}{10}p\right)=100p+180$$

(1) (1-2)

赤い箱の支払い額の期待値を E_R とすると、

$$E_R=1000\times p+0\times(1-p)=1000p$$

題意 $\Leftrightarrow E_B<E_R\Leftrightarrow 100p+180<1000p\Leftrightarrow p>\frac{1}{5}$ と $0\leqq p\leqq 1$ より、

$$\frac{1}{5}<p\leqq 1$$

(2) $x^3-x^2+x-1=(x^2+1)(x-1)$ に注意して

$$\frac{x^2-2x-1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}$$

とおく (a,b,c は実数)。

$$\text{右辺}=\frac{(ax+b)(x-1)+c(x^2-1)}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{(a+c)x^2+(b-a)x+(c-a)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$a+c=1,\ b-a=-2,\ c-a=-1$ より、$(a,b,c)=(2,0,-1)$。ゆえに、

$$\int\frac{x^2-2x-1}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\frac{2x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\log(x^2+1)-\log|x-1|+C$$

(C : 積分定数)

(3)

$$y=\sqrt{3}\sin x+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より $\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}\pi$ に注意すると

[1] 最大値について : $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$ の時

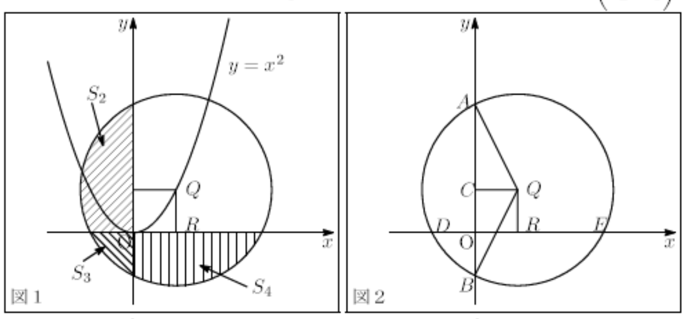
$$y\text{の最大値}=2\times 1=2$$

[2] 最小値について : $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=0$ の時

$$y\text{の最小値}=2\times\frac{1}{2}=1$$

$\boxed{4}$

(1) $\sqrt{1+4t^2}$ (2) 4 (3) $\frac{20}{3}\pi-5\sqrt{3}$ (4) $t=0,1$ (5) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$



(1) Q は $y=x^2$ 上なので (図 1 参照)、$Q(Q_x,Q_y)=(t,t^2)$ より、$Q'_x=1,\ Q'_y=2t$

$$Q\text{の速度の大きさ}=|\vec{v}_Q|=\sqrt{\{Q'_x\}^2+\{Q'_y\}^2}=\sqrt{1+4t^2}\cdots(A)$$

(2) 初めて $S_3=0$ となるのは $OQ=$ 半径 $=2\sqrt{5}$ となる時なので、

$$OQ^2=(2\sqrt{5})^2=20\Leftrightarrow t^2+t^4=20\Leftrightarrow t^4+t^2-20=0\Leftrightarrow(t^2+5)(t^2-4)=0$$

$t^2\geqq 0$ より $t^2=4$ であり、$t\geqq 0$ より $t=2$ となる。このとき、

$$Q_y=t^2=4.$$

(3) 図 2 のように A,B を定め、Q から y 軸におろした垂線の足を C とする。
$QA=2\sqrt{5},\ QC=\sqrt{5}$ より $\angle AQC=\frac{\pi}{3}$ であり、対称性より、$\angle AQB=\frac{2}{3}\pi$ となる。

$$S_2+S_3=\text{扇形}\ QAB-\text{三角形}\ QAB=\pi\cdot(2\sqrt{5})^2\cdot\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}-\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{5})^2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{20}{3}\pi-5\sqrt{3}$$

(4) 図 2 のように D,E を定める。$S_2\neq 0$ に注意すると

$$S_2=S_4\Leftrightarrow S_2+S_3=S_4+S_3\Leftrightarrow AB=DE\Leftrightarrow QC=QR\Leftrightarrow Q_x=Q_y$$

よって、$t=t^2\Leftrightarrow t(t-1)=0$ より、$t=0,1$

(5) $R(R_x,R_y)=R(Q_x,0)=(t,0)$ より、$R'_x=1,\ R'_y=0$

$$R\text{の速度の大きさ}=|\vec{v}_R|=\sqrt{\{R'_x\}^2+\{R'_y\}^2}=1$$

題意 $\Leftrightarrow|\vec{v}_Q|=2|\vec{v}_R|$ ゆえ、(A) を用いると $\sqrt{1+4t^2}=2\times 1=2$. 従って

$$1+4t^2=4\Leftrightarrow t^2=\frac{3}{4}$$

$t\geqq 0$ より、$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$。ゆえに、$Q(t,t^2)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$.

講評

$\boxed{1}$

(2-1) は 角の二等分線の性質から $AN:NB$ の比を求める.

(2-2) では $\overrightarrow{ON}\parallel b\vec{a}+a\vec{b}$, $\overrightarrow{OM}\parallel\vec{a}+\vec{b}$ を利用して,
分数計算をさけて, 内積計算を実行する.

(3-2) では e の定義式 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ を使う.

$\boxed{2}$

どの問題集, 参考書にものっている「はさみうち」利用の極限値を求める問題。(2) は数学的帰納法でもよいが, (相加平均) $\geqq$ (相乗平均) を利用すれば, 直接不等式が示せる. また, 等号が成立しないことを示す必要がある.

$\boxed{3}$

(1) 基本的期待値計算の問題.

(2) $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}$ と部分分数に分解する.

(3) 三角関数の合成の基本問題.

$\boxed{4}$

(1) 点 (x,y) のとき 速度の大きさは $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

(2)～(4) は 図を利用しながら考えていく

難易度は I 期と同程度で, 昨年より試験時間が短縮されたが, ボリュームは変わっていない.
受験者の層を考えると 合格点は 85% 程度必要である.